14

Calcul approché

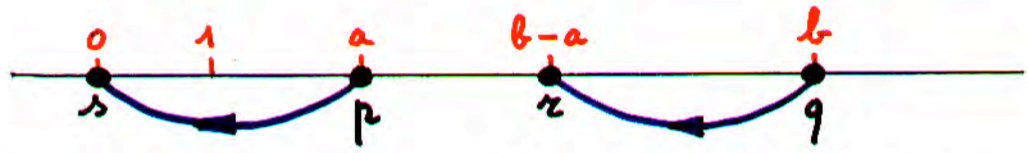
1 Distance sur $\mathbb{R}$

L'unité de longueur étant fixée, tout couple de points du plan admet une distance.

Si

Alors $d(p,q) = \,?$

Réponse :

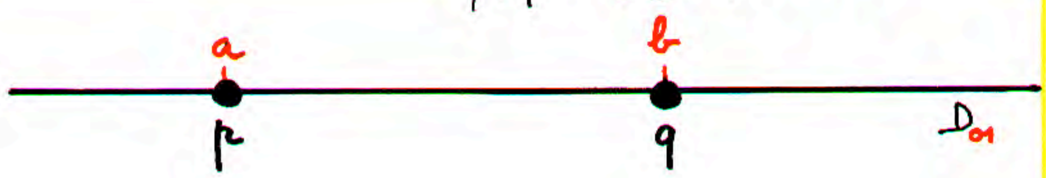


$$\begin{aligned} d(p,q) &= d(s,r) && \text{l'isométrie } \overrightarrow{ps} \text{ respecte la distance} \\ &= \text{absc. } r && \text{définition de la distance} \\ &= b-a \end{aligned}$$

Le dessin précédent suppose $a \leqslant b$.
Pour tous $b \leqslant a$: $d(p,q) = a - b$
En tous cas

1 $p, q \in \pi$; $a, b \in \mathbb{R}$

Si



Alors $d(p,q) = |a-b|$

La bijection $D_{01} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \text{absc.}\, x$ transporte cette distance sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ $\forall r, s \in \mathbb{R}$: $|r-s|$ = distance de r à s $= d(r,s)$

EX 1

Distances de toutes les paires de points dessinées ?

Distances de toutes les abscisses de ces points ?

EX 2

$d(p,q) =$ $\quad$ $d(p,q) =$ $\quad$ $d(1,3) =$

EX 3 $\forall r, s \in \mathbb{R}$: $\quad d(r,s) = d(s,r)$

EX 4 $\forall r, s \in \mathbb{R}$: $\quad d(r,s) = 0$ ssi $r = s$

2 Valeurs approchées

Nous venons de définir une distance sur $\mathbb{R}$. Tu as déjà rencontré précédemment d'autres exemples de distances : distance dans le plan, sur une droite, dans le vectoriel euclidien plan.

Un ensemble E, muni d'une distance d, est appelé espace métrique et est noté E, d

Pour faire bref, dans la suite "espace métrique (E,d)" sera mis pour un des espaces métriques rappelés ci-dessus.

Notations utilisées dans ce chapitre

$$\varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_0^+$$

2 en espace métrique E, d

a est <u>valeur approchée</u> de x <u>à ε près</u>

<u>ssi</u>

$$d(a,x) \leqslant \varepsilon$$

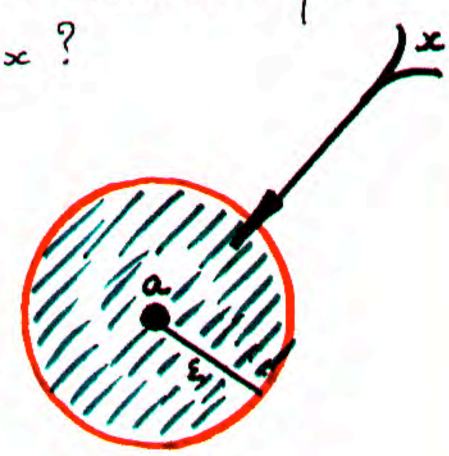
3 a est <u>valeur approchée</u> de x <u>à moins de ε près</u>

<u>ssi</u>

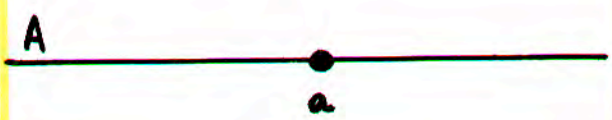
$$d(a,x) < \varepsilon$$

Voici $a \in \Pi, d$

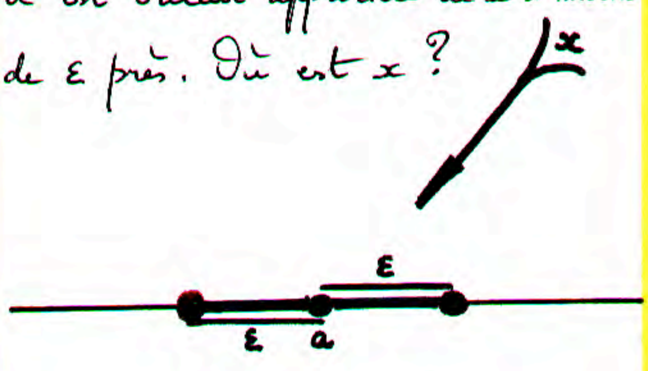
On t'informe que a est valeur approchée de x à moins de ε près.
Où est x ?



Voici $a \in A, d$



a est valeur approchée de x à moins de ε près. Où est x ?



EX5 Même question 1. si $a \in \mathbb{R}, d$

2. si $\vec{a} \in \Pi_0, d$

EX6 On t'informe que a est valeur approché de x à ε près.
Situe x dans chacun des espaces métriques qui te sont connus.

<u>Remarque</u>

Les définitions 2 et 3 sont symétriques en a et en x puisque

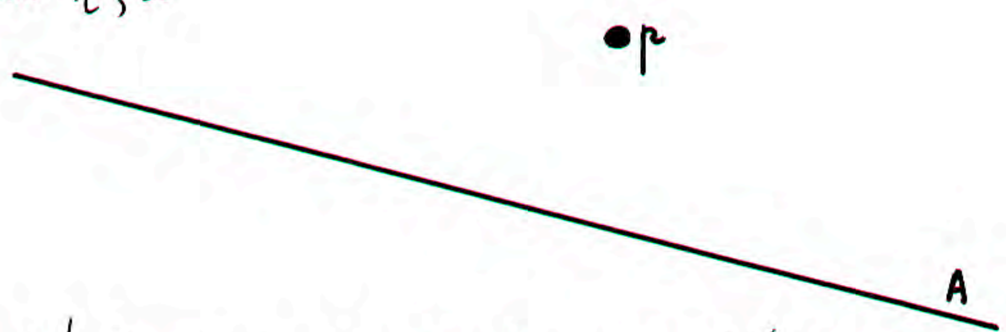
$\forall a, x \in E, d \qquad d(a,x) = d(x,a)$

Donc

a est valeur approché de x à ε près	$\underline{\underline{\text{ssi}}}$	x est valeur approché de a à ε près

Néanmoins, comme l'illustre les dessins ci-dessus, quand on parle de la valeur approché a de x on suppose le plus souvent que x est l'élément que l'on voudrait appréhender, situer, calculer, mais que notre infirmité d'humain nous permet seulement d'approcher par des éléments tels que a.
En substituant x par sa valeur approché a, il est évidemment essentiel de connaître l'approximation.

EX7 Dans Π, d



On t'informe que p est valeur approché du point x appartenant à A, à moins de 4 cm près. Où est x ?

EX8 Voici $p, q \in \Pi$

p est valeur approché de x à moins de 5 cm près.

q est valeur approché de x à moins de 4,5 cm près. Où est x?

EX9 Dans A, d

a est valeur approché de x à 3,7 cm près.

b est valeur approché de x à 4,2 cm près. Où est x ?

EX10 Dans $\mathbb{R}$, d

a est valeur approché de x à moins de ε près

ssi

$$x \in \left]a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon\right[$$

EX11 Une valeur approché de $x \in \mathbb{R}$, à moins de 0,001 près, est 5,739.

Plus petit intervalle comprenant certainement x ?

EX12 On t'informe que 11,1011 et 11,1011 sont valeurs approchées de $x \in \mathbb{R}$, respectivement à 0,0001 et 0,00001 près. Où est x ?

Fournis quelques valeurs possibles pour x.

EX13 Valeurs approchées de 3,458 à moins de

0,1   0,05   0,001   près ?

EX14 Voici $q = 6{,}45\,45\,45\ldots \in \mathbb{Q}$

et $r = 6{,}45027819$ etc $\in \mathbb{R}$

Fournis plusieurs valeurs approchées de q et de r à moins de

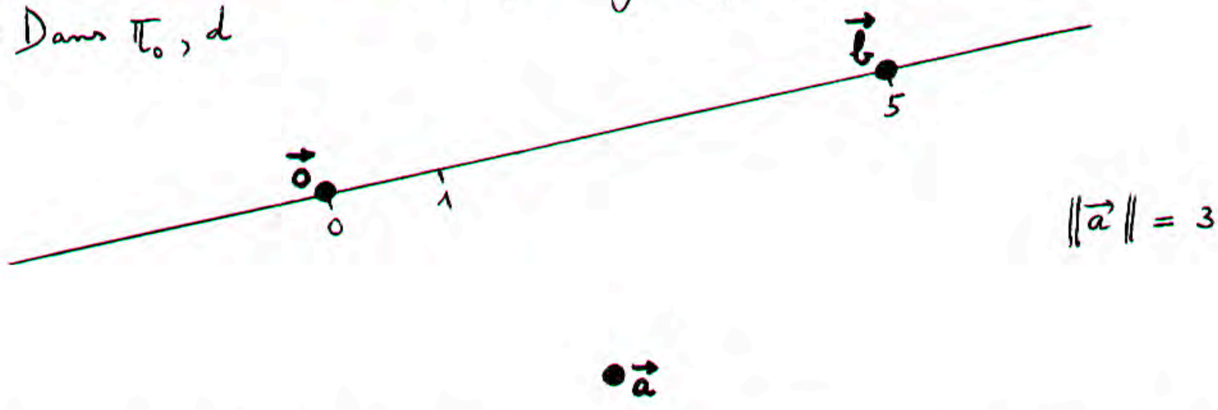
10^{-2} 10^{-6} 10^{-8} près.

EX15 Une valeur approché de q à moins de 10^{-8} près est 6,45454545

Une valeur approché de r à 10^{-8} près est 6,45027819

Tu ne peux pas affirmer que 6,45027819 est valeur approchée de r <u>à moins de</u> 10^{-8} près. Justifie !

EX. Dans Π_0, d



$\vec{a}$ est valeur approchée de $\vec{x}$ à 1,5 près et $\|\vec{x}\| = 2,5$. Où est $\vec{x}$?
$\vec{b}$ est valeur approchée de $\vec{y}$ à moins de 0,5 près.
Dessine plusieurs valeurs possibles pour $\vec{y}$.
Dessine, s'il existe, le vecteur $\vec{y}$ de longueur minimum.

EX17 Aucun décimal limité n'égale $\frac{1}{3}$.
Les machines strictement décimales ne peuvent écrire et manipuler que des décimaux limités. D'où la nécessité de se contenter de valeurs approchées. Calcule différentes valeurs approchées de $\frac{1}{3}$.

EX18 Voici deux éléments x, y d'un espace métrique E, d.
Chacun d'eux est valeur approchée de l'autre ! Les valeurs approchées, sans plus, sont donc sans intérêt.
Ce sont les valeurs approchées à ... près
à moins de ... près
qui sont intéressantes, celles où l'<u>approximation</u> est donnée !

3 Valeurs approchées dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}$ $\qquad d(a,b) = |a-b|$

De plus, nous savons que

$$|a-b| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < b < a+\varepsilon$$ 1. $\boxed{2}$

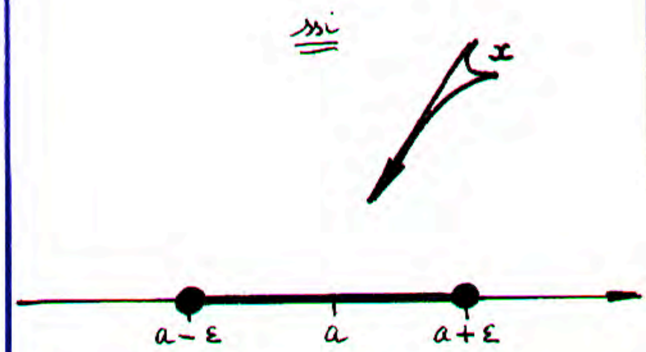
$$|a-b| \leqslant \varepsilon \iff a-\varepsilon \leqslant b \leqslant a+\varepsilon$$

Nous pouvons donc reformuler les définitions 2 et 3 :

en $\mathbb{R}$

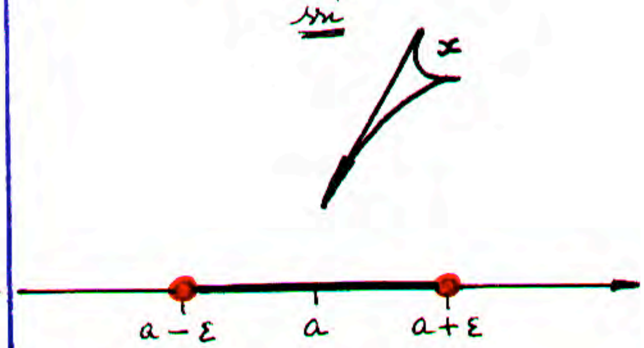
2 a est valeur approché de x à ε près

ssi



3 a est valeur approché de x à moins de ε près

ssi

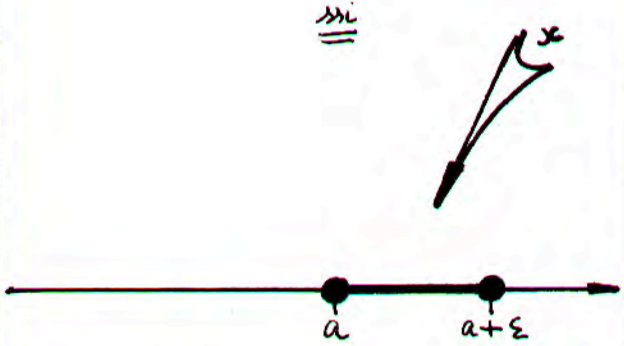


L'ordre de $\mathbb{R}$ permet d'affiner ces définitions.

en $\mathbb{R}$

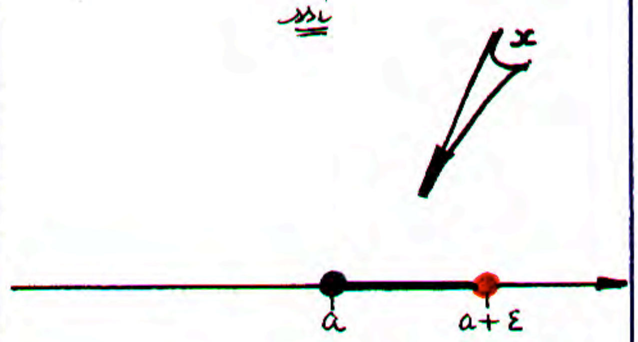
4 a est <u>valeur approchée</u> de x <u>à ε près par défaut</u>

ssi



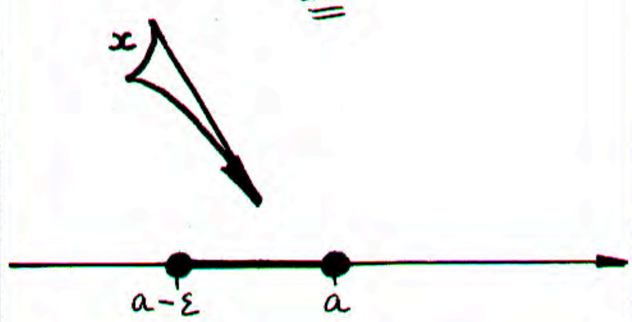
5 a est <u>valeur approchée</u> de x <u>à moins de ε près par défaut</u>

ssi



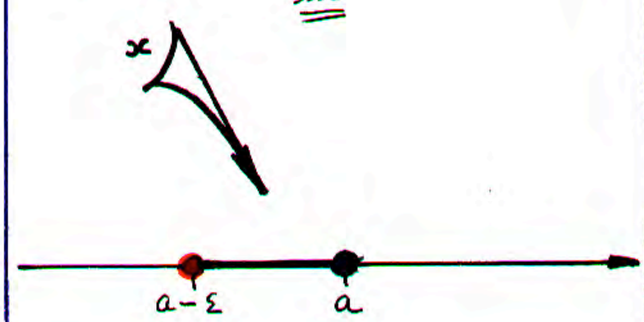
6 a est <u>valeur approchée</u> de x <u>à ε près par excès</u>

ssi



7 a est <u>valeur approchée</u> de x <u>à moins de ε près par excès</u>

ssi



EX19 <u>Si</u> $5{,}738$ est valeur approchée de x à $0{,}005$ près par défaut

<u>Alors</u> quel est le plus petit intervalle comprenant certainement x ?

EX20 On t'informe que $2{,}34012$ est valeur approchée de x à 5.10^{-5} près par excès.

Combien de chiffres décimaux de x te sont-ils connus ?

EX21 Valeurs approchées par défaut, par excès de $-0{,}025$ etc à $0{,}02$ près ?

EX22 Voici $r = 8{,}5609$ etc

8,55 est une valeur approchée de r à moins de 0,02 près par défaut

8,56 est une valeur approchée de r à moins de 0,02 près par défaut

8,560 est une valeur approchée de r à moins de 0,002 près par défaut

8,5608 est une valeur approchée de r à 0,0002 près par défaut

Tu ne peux pas affirmer que

8,5608 est une valeur approchée de r à moins de 0,0002 près par défaut

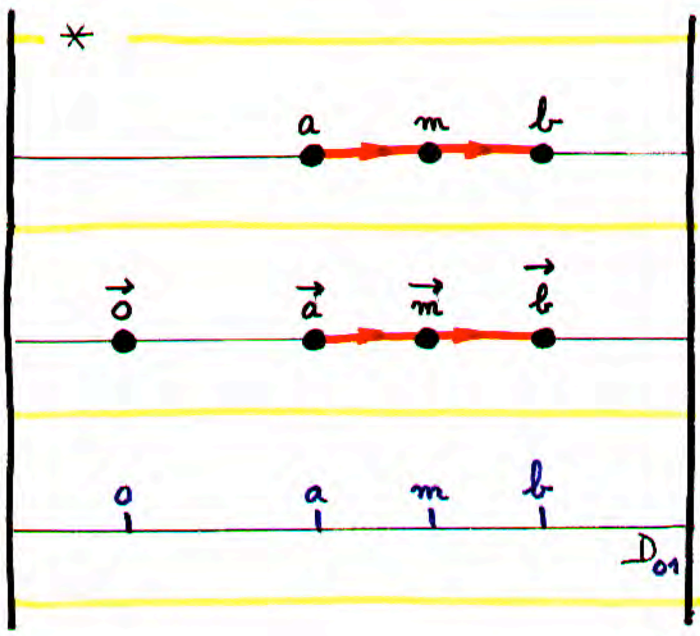
Justifie ces affirmations.

EX23 Fournis d'autres valeurs approchées de r à moins de 0,02, de 0,002 près par défaut

Fournis des valeurs approchées de r à moins de 0,0002 près par défaut.

EX24 $a, b, m \in \pi$

m est milieu de $\{a, b\}$ $\underline{\underline{\text{ssi}}}$ $\text{absc.}\, m = \frac{1}{2}(\text{absc.}\, a + \text{absc.}\, b)$



m est milieu de $\{a, b\}$

$\Updownarrow$

$\vec{m} - \vec{a} = \vec{b} - \vec{m}$

$\Updownarrow$

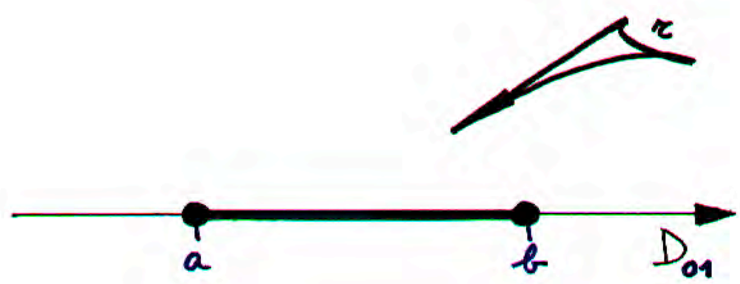
$m - a = b - m$

$\Updownarrow$

$m = \frac{1}{2}(a + b)$ ∎

Justifie !

EX25



Fournis une valeur approchée de r par défaut, $(r \in \mathbb{R})$

une valeur approchée de r par excès,

une valeur approchée de r,

... et précise, dans chaque cas, l'approximation.

EX 26

Peux-tu fournir des valeurs approchées de $r \in \mathbb{R}$, et l'approximation correspondante ? Attention, la donnée est différente de celle de l'EX25 !

4 Valeurs décimales approchées

Voici $r = 0,473$ etc

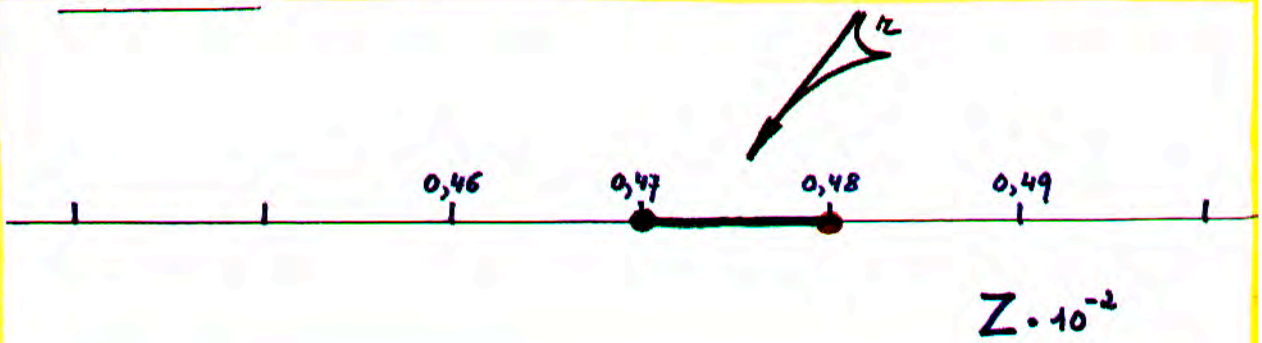
$0,465 \quad 0,4652 \quad 0,47 \quad 0,471 \quad 0,472$

sont des valeurs approchées de r à moins de $0,01 = 10^{-2}$ près par défaut.

Vérifie !

$0,47 = 47 \times 10^{-2} \in \mathbb{Z} \times 10^{-2}$

Archimède



$0,47$ est la <u>seule</u> valeur approchée de r à moins de 10^{-2} près par défaut qui comprenne (au plus) <u>deux</u> chiffres décimaux.

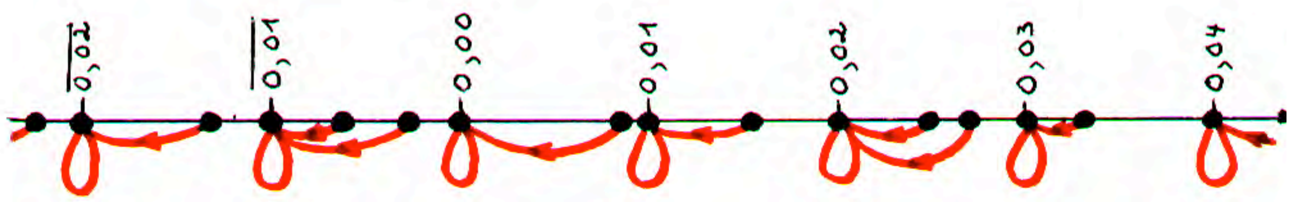
$r \in \mathbb{R}$; $n \in \omega$; $z \in \mathbb{Z}$

8/9 Si $$z \cdot 10^{-n} \leqslant r < (z+1) \cdot 10^{-n}$$

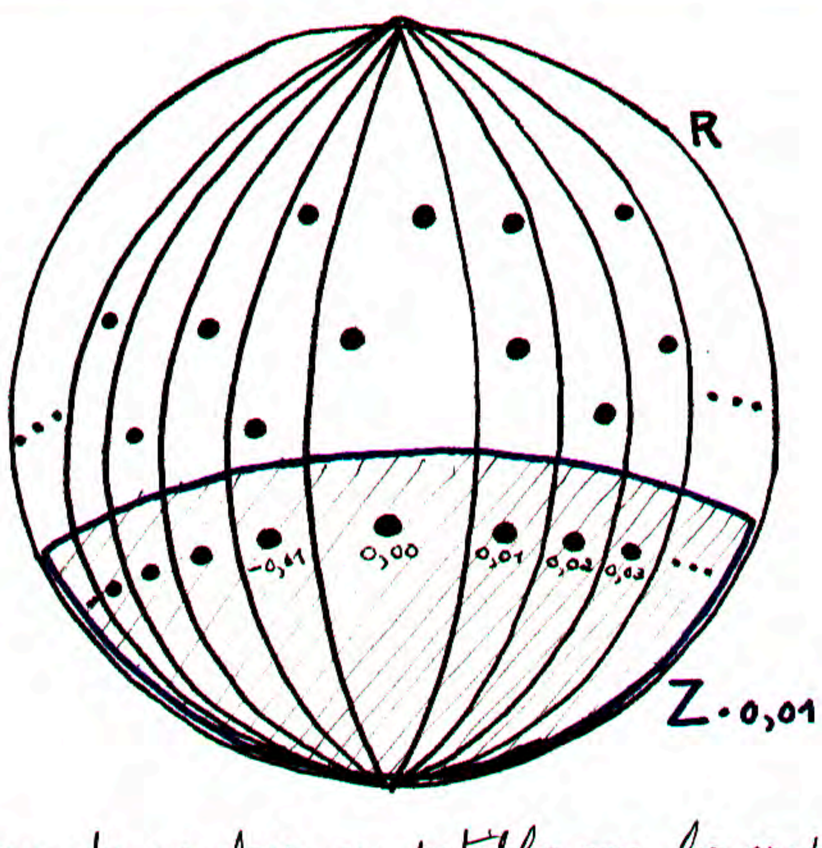
Alors $z \cdot 10^{-n}$ est LA valeur décimale approchée de r à moins de 10^{-n} près par défaut

$(z+1) \cdot 10^{-n}$ est LA valeur décimale approchée de r à moins de 10^{-n} près par excès

Quelques flèches du graphe de la fonction
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: $x \longmapsto$ val. déc. approchée de x à moins de 0,01 près par défaut



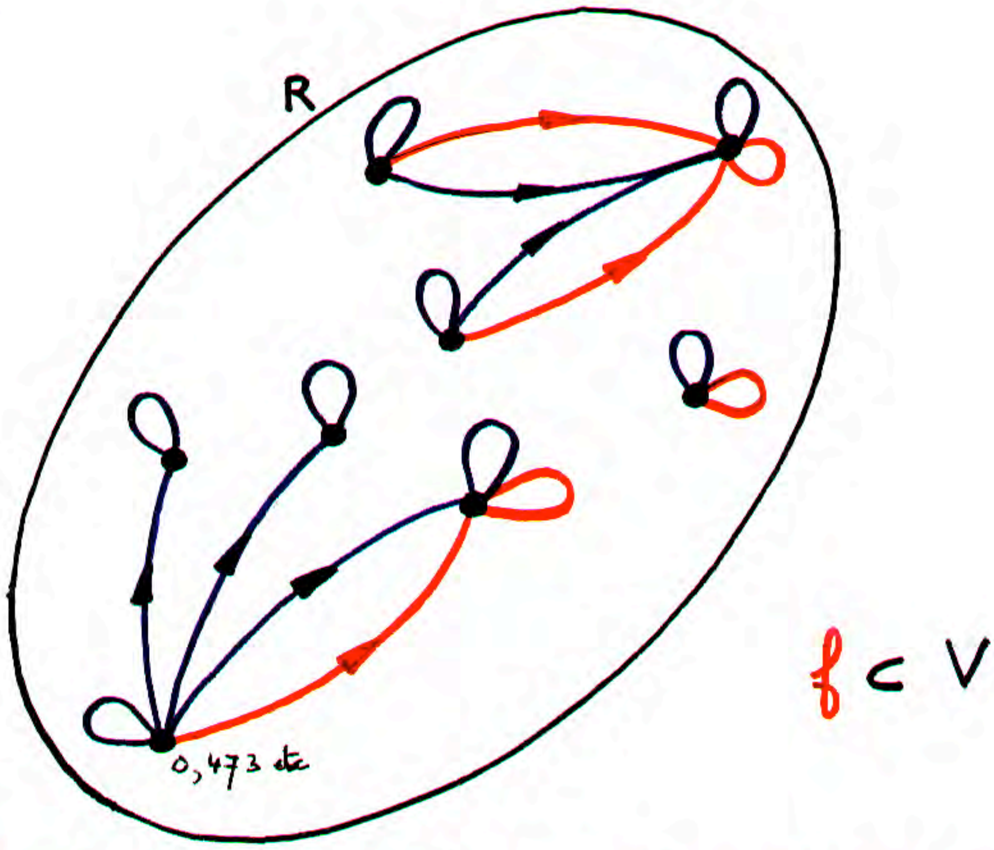
Cette fonction définit une équivalence dans $\mathbb{R}$
"... a même valeur décimale approchée à moins de 0,01 près par défaut que ...",
qui, elle-même, définit une partition de $\mathbb{R}$



EX 27 Marque des nombres compatibles avec les graphes ci-dessus.

- Les valeurs décimales approchées à moins de 10^{-n} près par défaut ou par excès sont des décimaux limités comprenant $\underline{\underline{n}}$ chiffres décimaux. (au plus)
- La valeur décimale approchée de r à moins de 10^{-n} près par défaut est une valeur approchée de r à moins de 10^{-n} près par défaut.

EX 28



f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: $x \longmapsto$ val. déc. appr. de x à moins de 0,01 près par défaut

V = " ... a comme valeur approchée à moins de 0,01 près par défaut ... "

Marquer des nombres compatibles avec ce graphe.

EX29

x	valeur décimale approchée de x à moins de			
	0,1 près par défaut	0,01 près par défaut	0,001 près par défaut	0,0001 près par défaut
2,4567				
1/3				
1,26 26 26 26...				
2,4567 etc				
−2,4567				
−2,4567 etc				

Complète ce tableau ... chaque fois que c'est possible.

EX30 __Si__ 0,00987 n'est pas valeur décimale approchée de

$a = 0{,}00987$ etc à moins de 10^{-5} près par défaut

__Alors__ que peux-tu dire de a ?

EX31 0,00987 n'est pas toujours valeur __décimale__ approchée de

$a = 0{,}00987$ etc à moins de 10^{-5} près par défaut

MAIS 0,00987 est toujours valeur approchée de a à moins de 10^{-5} près par défaut.

EX32 Meilleure valeur approchée par défaut de

3,780128 etc 3,780129 etc ?

Précise l'approximation.

5 Calcul approché dans le champ réel

a et b étant valeurs approchées de la longueur r et de la largeur s de ce rectangle à moins de 0,1 cm près par défaut, calcule une valeur approchée du périmètre et de l'aire de ce rectangle.

- $$a \leqslant r < a + 0{,}1 \quad \text{et} \quad b \leqslant s < b + 0{,}1$$
$$\Downarrow$$
$$a + b \leqslant r + s < (a+b) + 0{,}2$$
$$\Downarrow$$
$$2(a+b) \leqslant 2(r+s) < 2(a+b) + 0{,}4$$

$2(a+b)$ est valeur approchée du périmètre à moins de $\underline{0{,}4 \text{ cm}}$ près par défaut.

- $$0 < a \leqslant r < a + 0{,}1 \quad \text{et} \quad 0 < b \leqslant s < b + 0{,}1$$
$$\Downarrow$$
$$ab \leqslant rs < ab + \left(0{,}1 \times (a+b) + 0{,}01\right)$$

ab est valeur approchée de l'aire à moins de $\underline{0{,}1 \times (a+b) + 0{,}01}$ cm^2 près par défaut

Dans les EX suivants, les lettres désignent des réels ; $\varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_0^+$

EX 33 On te signale que

3,423 est valeur approchée de r à 0,001 près par défaut

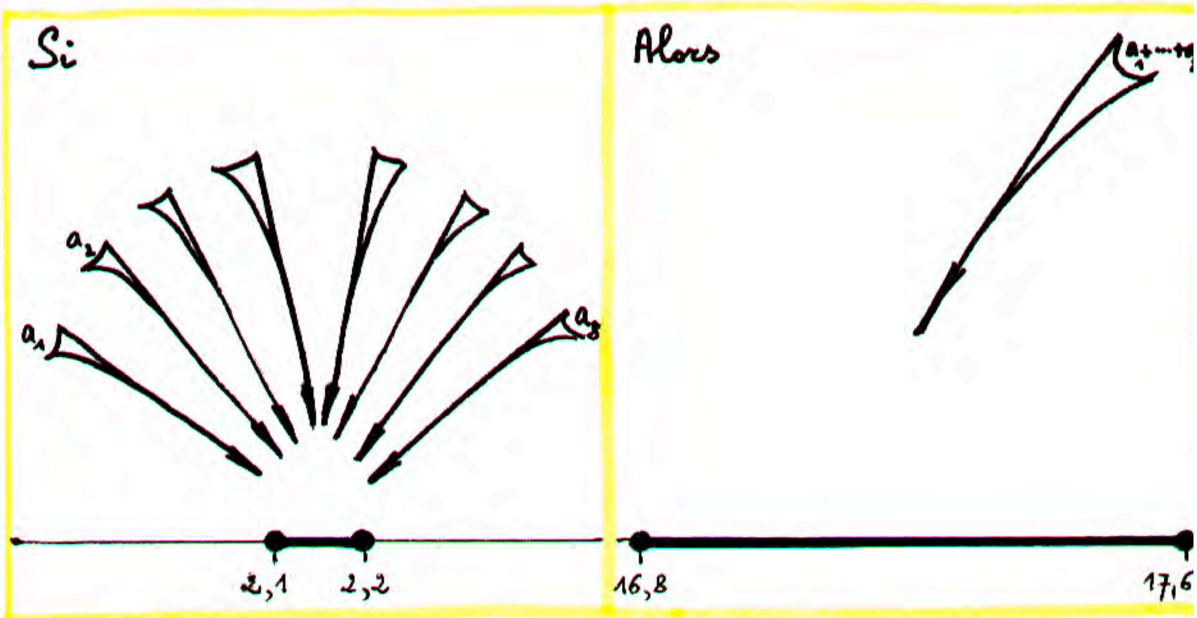
7,108 est valeur approchée de s à 0,001 près par défaut

Calcule la meilleure valeur approchée de $r+s$, $-r$, $3s$, $r-s$.

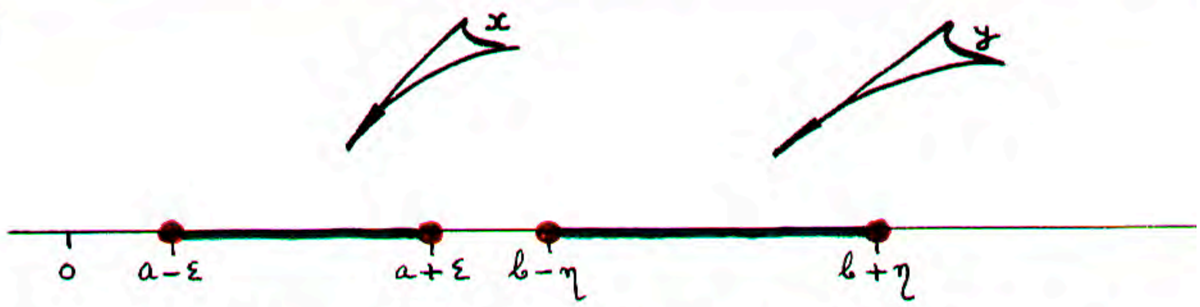
Dans chaque cas, précise l'approximation.

EX34 Voici mille nombres dont je te donne des valeurs approchées à 10^{-1} près.
Meilleure approximation sur leur somme ?

EX35

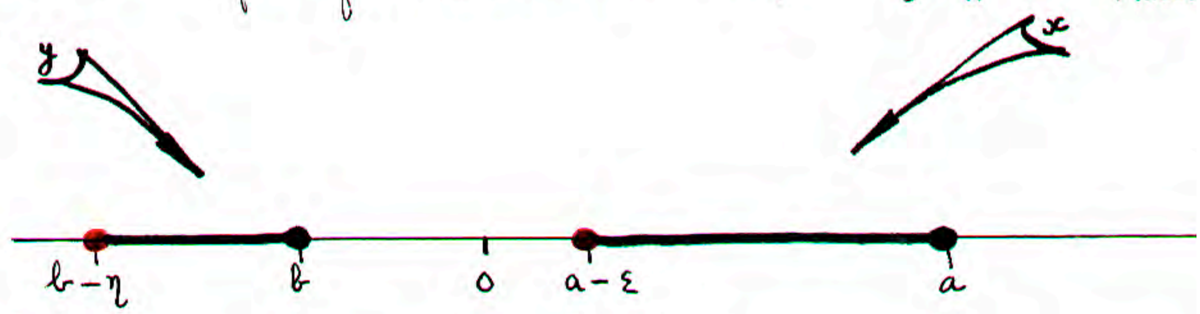


EX36



Dessine le plus petit intervalle de $\mathbb{R}$ auquel $x+y$ appartient certainement

EX37



Dessine le plus petit intervalle de $\mathbb{R}$ auquel $x-y$ appartient certainement

Traduis la donnée et la réponse en termes de valeurs approchées.

EX37 La valeur décimale approchée à moins de 0,1 cm près par défaut du rayon de ce cercle est 12,5.
Valeur approchée de la longueur de ce cercle ?

EX39

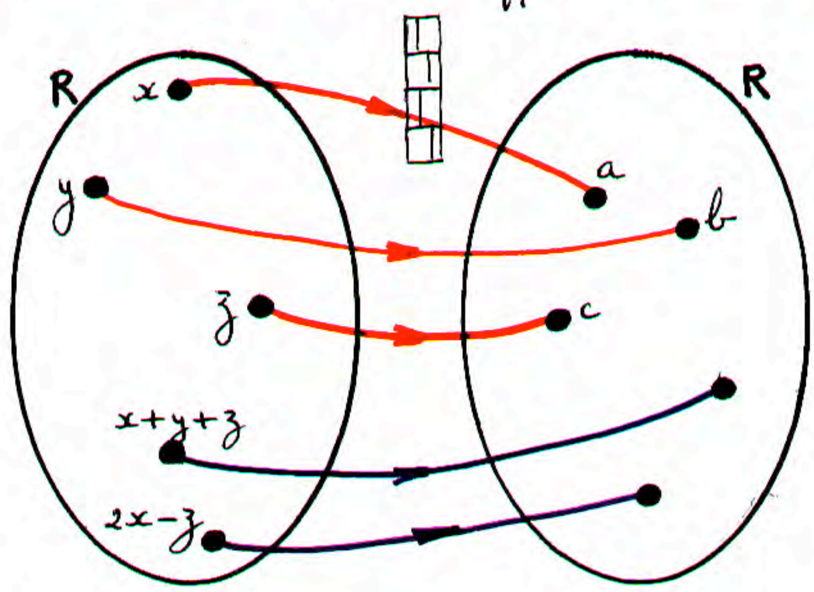
Si a est valeur approché de r à ε près
$k \in \mathbb{R}$
Alors ka est valeur approché de kr à $|k| \cdot \varepsilon$ près.

EX40

Si a est valeur approché de r à ε près
b est valeur approché de s à η près
Alors $a+b$ est valeur approché de $r+s$ à ... près

EX41 Calcule une valeur approché de $5{,}1x - 3{,}6y$, et précise l'approximation, sachant que
$3{,}5$ est la valeur décimale approché de x à moins de 10^{-1} près par défaut
$2{,}78$ est la valeur décimale approché de y à moins de 10^{-2} près par défaut

EX42 **Si** $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto$ val. déc. appr. de x à moins de 10^{-3} près par défaut



Alors " ... a comme valeur approchée à moins de ... près par défaut ... "
Alors " ... a comme valeur approché à moins de ... près par défaut ... "
Complète le graphe et le texte.

EX43 Une valeur approché de la longueur d'un côté de ce carré, à 1 cm près par défaut, est 4,25 m.
Valeur approché de l'aire de ce carré ?

EX 44

Calcule, avec la meilleure approximation possible, une valeur approché de l'aire de ce rectangle.

EX 45 **Si** 2,5 est la val. déc. appr. du rayon de ce cylindre à moins de 10^{-1} près par défaut
3,7 est la val. déc. appr. de la hauteur de ce cylindre à moins de 10^{-1} près par défaut
Alors calcule une valeur approché du volume de ce cylindre, et précise l'approximation

EX 46 $a, r \in \mathbb{R}^+$

Si a est valeur approché de r à ε près par défaut
Alors $\sqrt{a}$ est valeur approché de $\sqrt{r}$ à $\sqrt{\varepsilon}$ ~~près par défaut~~

$*$

$$a \leqslant r \leqslant a+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{r} \leqslant \sqrt{a+\varepsilon}$$

Or $\sqrt{a+\varepsilon} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{\varepsilon}$

Donc $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{r} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{\varepsilon}$

Justifie !

EX 47 Voici des valeurs approchés de x à ε près par défaut

Valeur approché de x	ε
1600	100
2.250.000	10^4
45×10^8	10^6
6,25	0,01
0,0121	10^{-4}
8×10^{-10}	10^{-5}

Dans chaque cas, calcule une valeur approché de $\sqrt{x}$ et précise l'approximation.

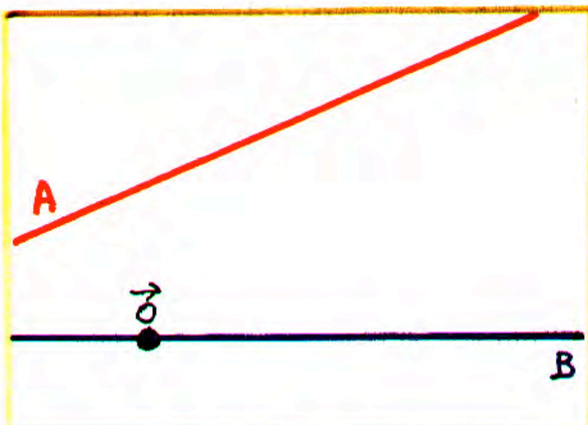
6 Addition de parties de Π_0

10

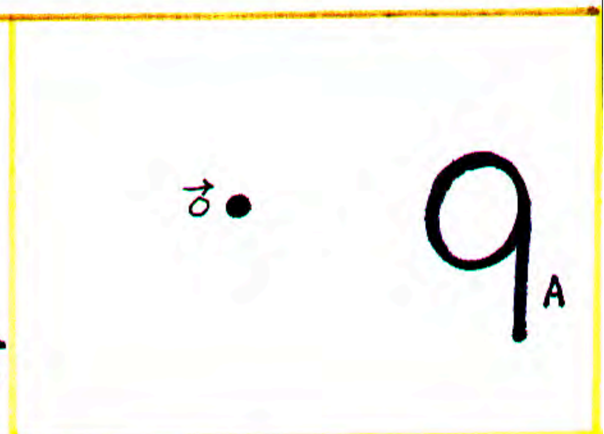
Pour tout $A, B \subset \Pi_0$

1. $A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in A \text{ et } \vec{b} \in B\}$
2. $-A = \{-\vec{a} \mid \vec{a} \in A\}$
3. $A - B = A + (-B)$

EX

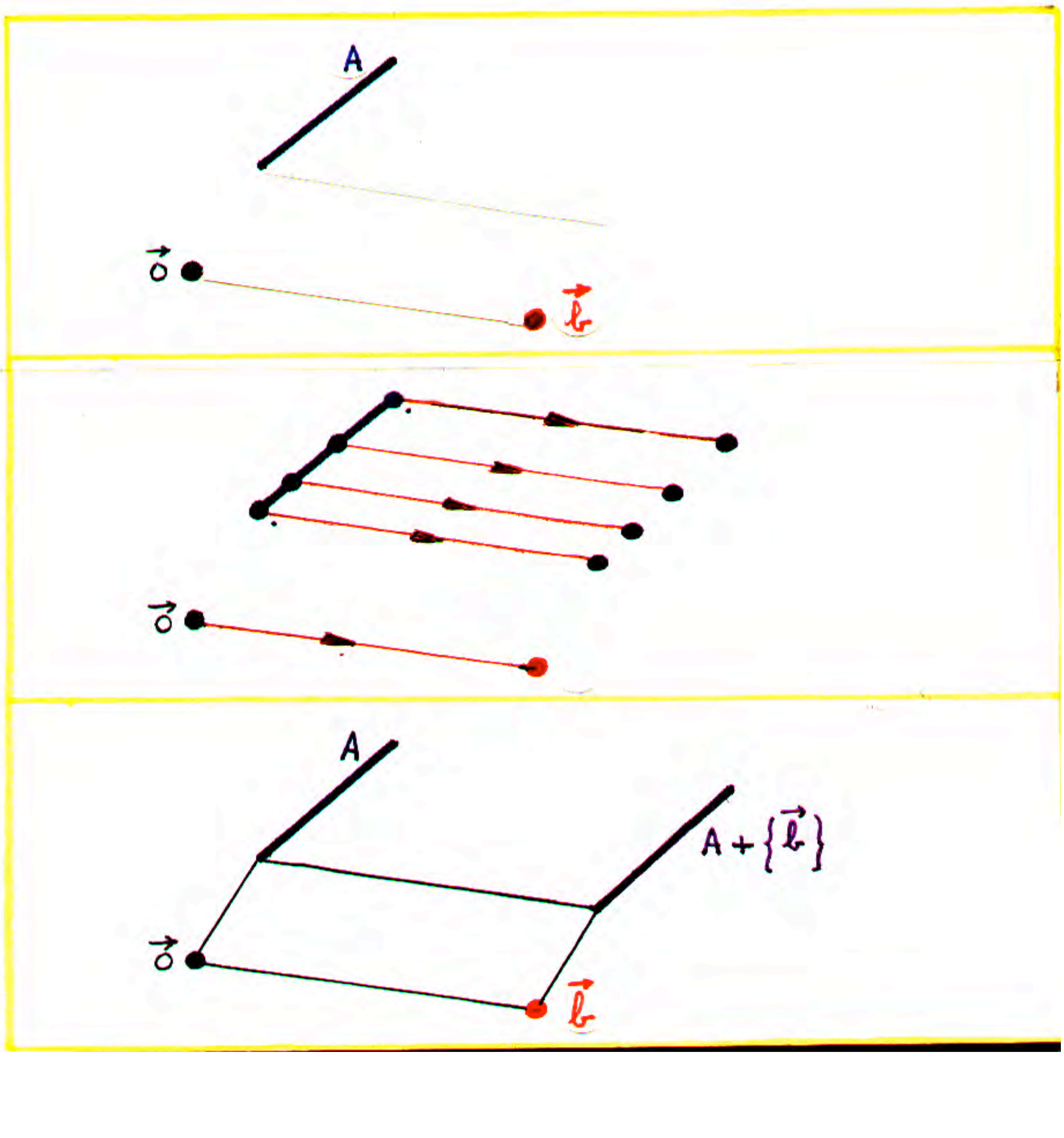


Dessine $-A$, $-B$.

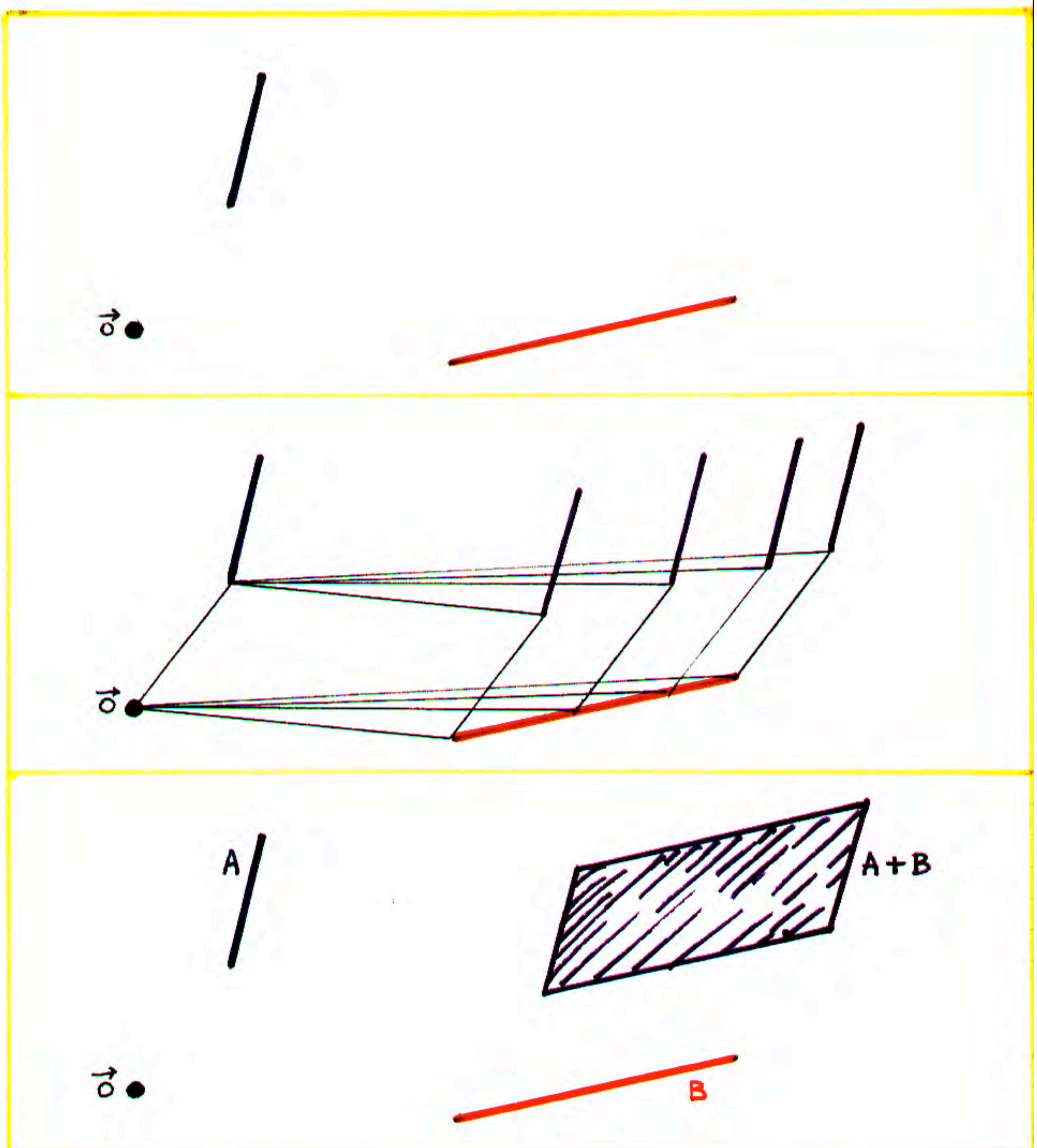


Dessine $-A$.

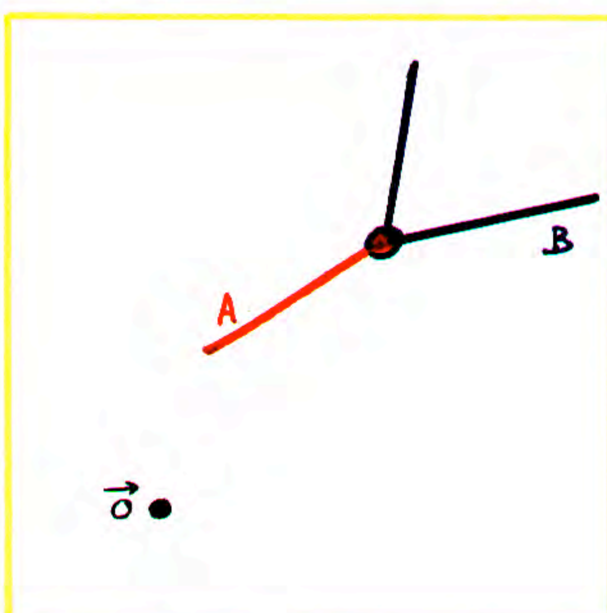
EX

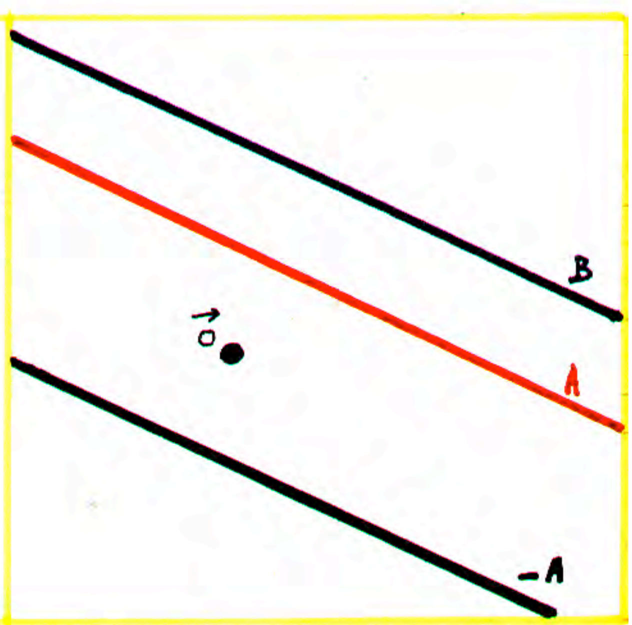


EX



EX

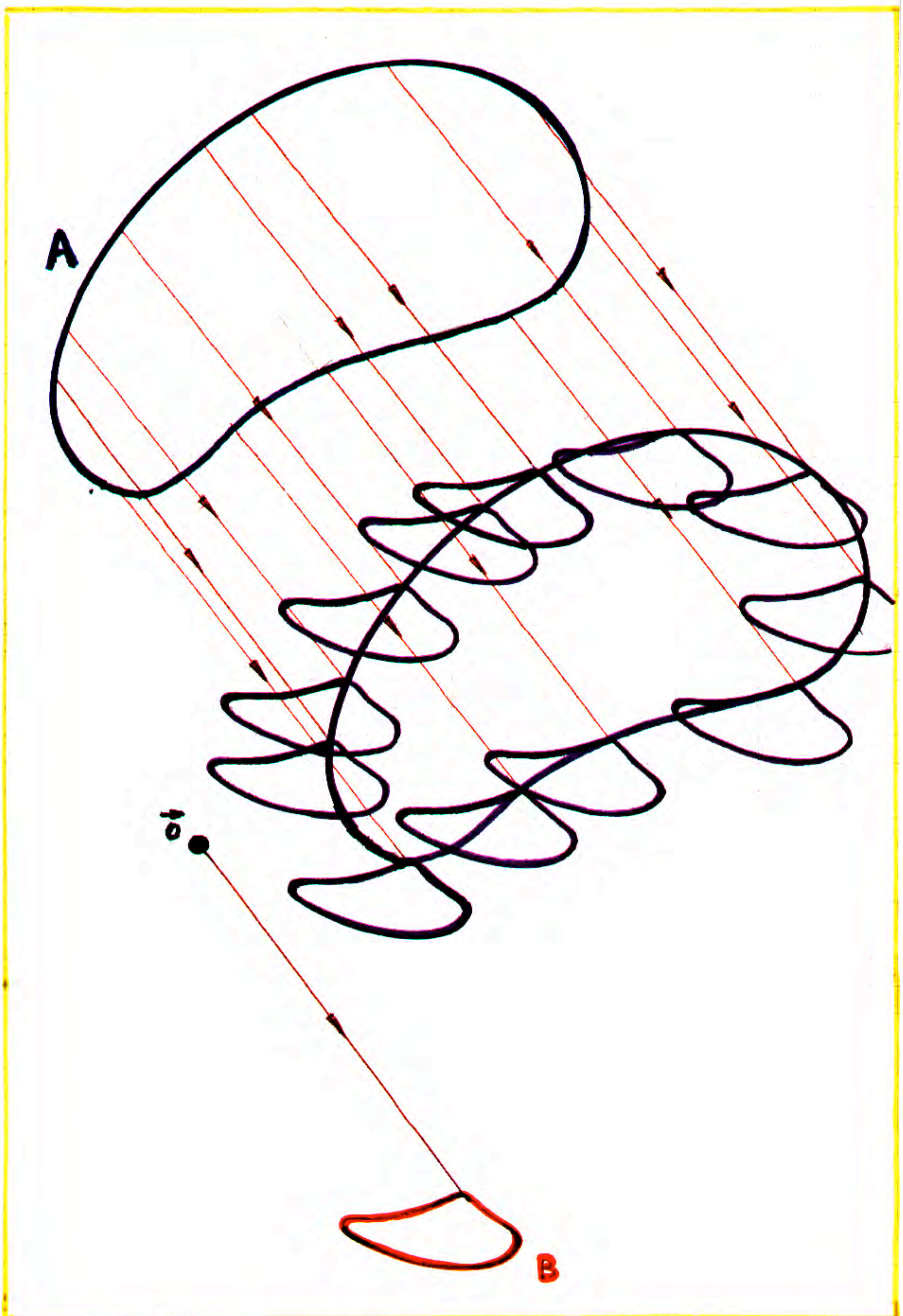




Dessine A + B.

Dessine A + B, A − A.

EX



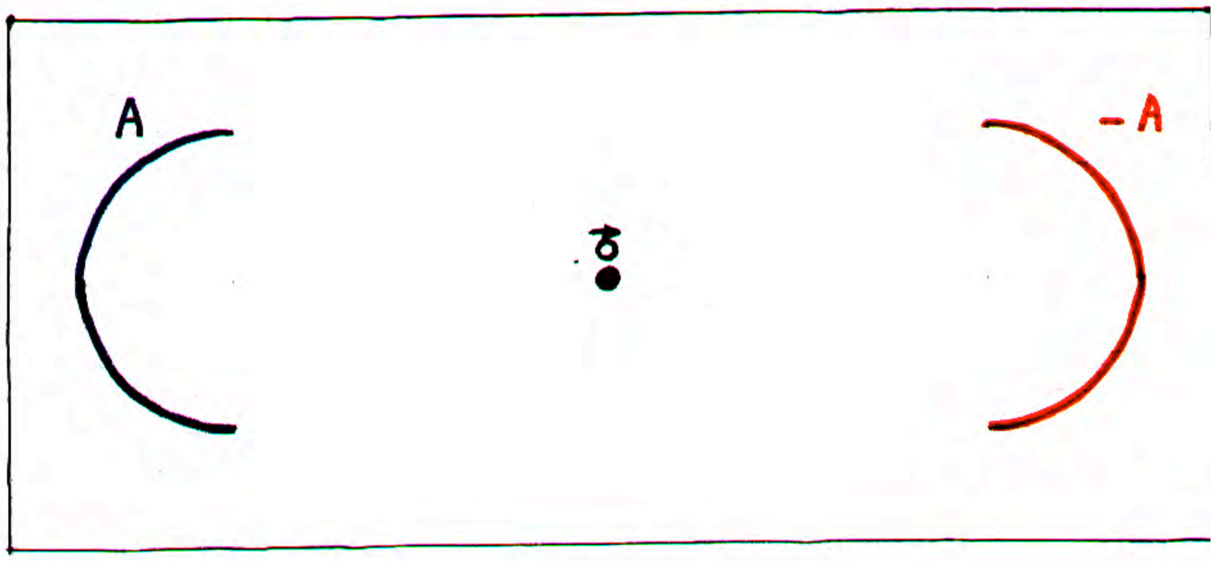
Examine attentivement ce dessin.

Certains points de $A + B$ ont été dessinés. Achève le dessin!

EX Dessine, dans Π_0, deux lignes, à ta fantaisie.
Dessine leur somme.

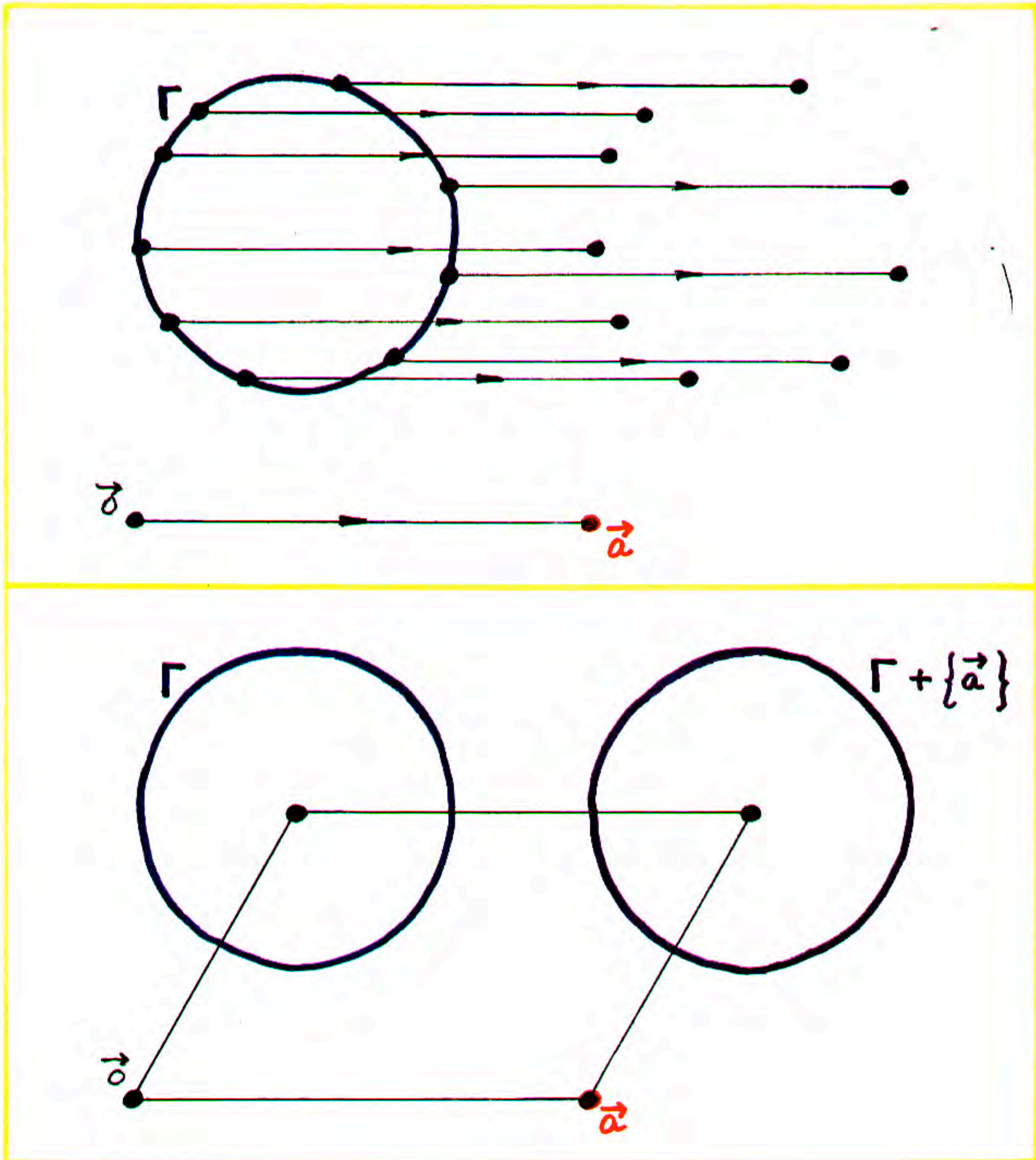
EX Dessine un bord de carré et un bord de triangle ... et leur somme.

EX



Dessine $A - A$.

EX

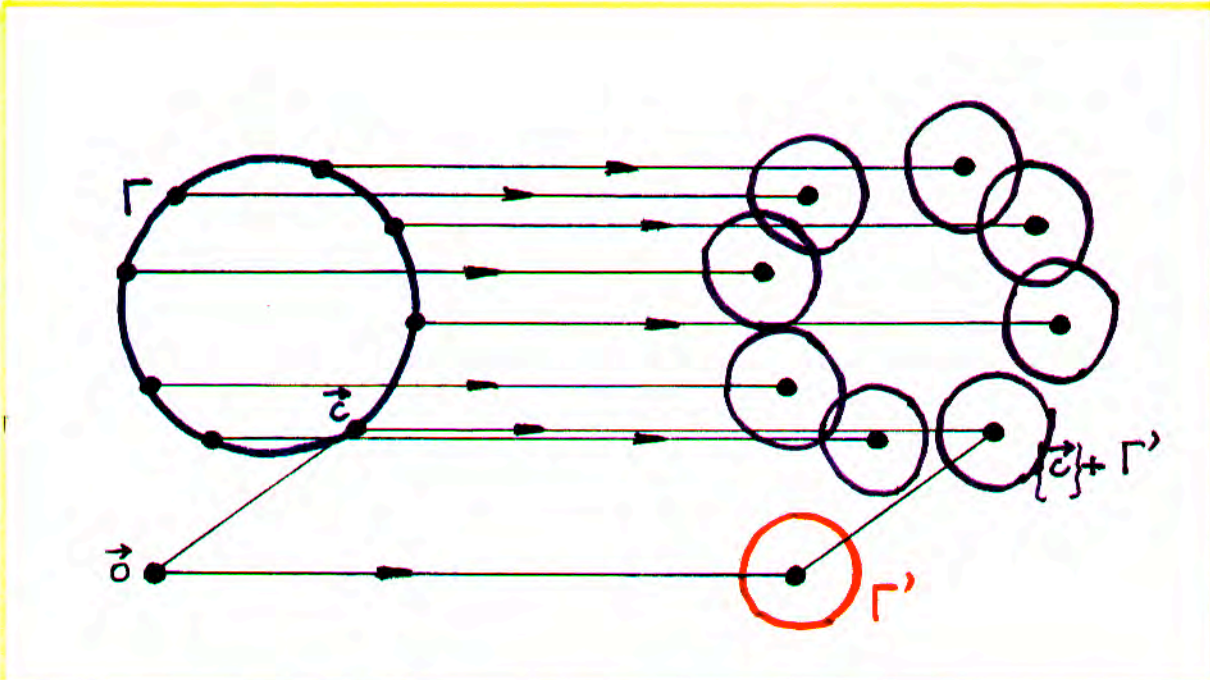


EX

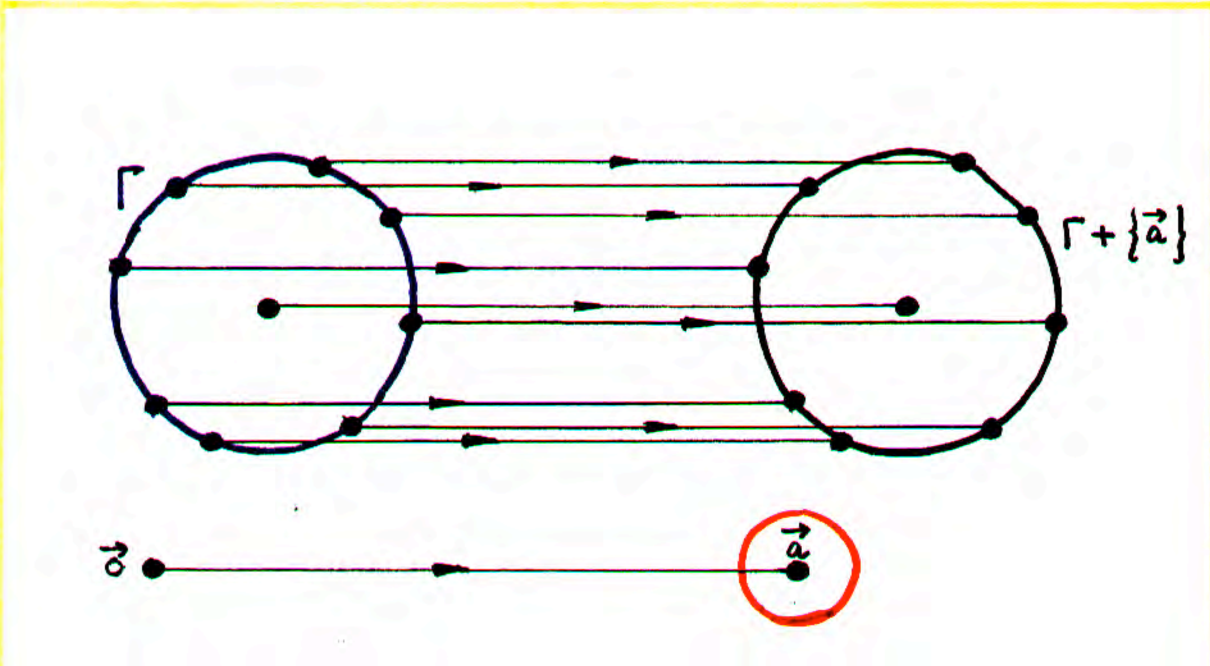
$$\Gamma(\vec{c}, r) + \{\vec{a}\} = \Gamma(\vec{c}+\vec{a}, r)$$

$$
\begin{aligned}
* \quad \Gamma(\vec{c}, r) &= \{\vec{x} \mid \vec{x} \in \Pi_0 \text{ et } d(\vec{c}, \vec{x}) = r\} \\
\Gamma(\vec{c}, r) + \{\vec{a}\} &= \{\vec{x}+\vec{a} \mid \vec{x} \in \Pi_0 \text{ et } d(\vec{c}, \vec{x}) = r\} \\
&= \{\vec{x}+\vec{a} \mid \vec{x} \in \Pi_0 \text{ et } d(\vec{c}+\vec{a}, \vec{x}+\vec{a}) = r\} \\
&= \{\vec{y} \mid \vec{y} \in \Pi_0 \text{ et } d(\vec{c}+\vec{a}, \vec{y}) = r\} \\
&= \Gamma(\vec{c}+\vec{a}, r) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

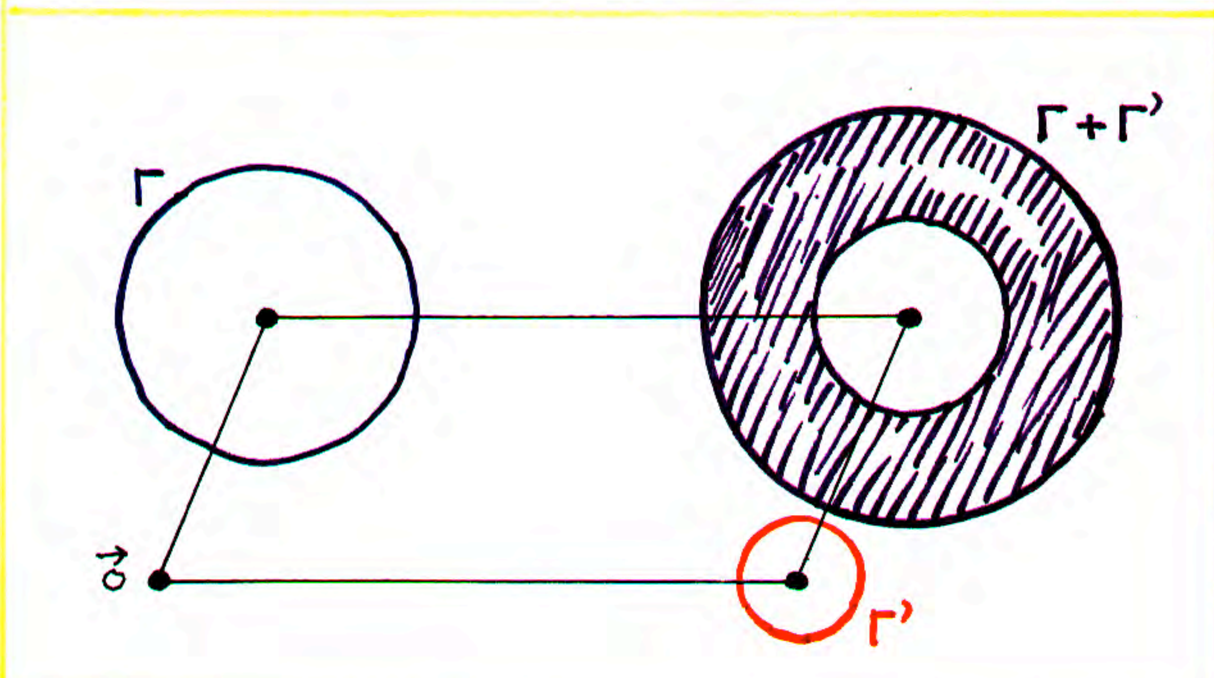
EX



Γ
$\vec{c}$
$\{\vec{c}\}+\Gamma'$
$\vec{o}$
Γ'



Γ
$\Gamma+\{\vec{a}\}$
$\vec{o}$
$\vec{a}$



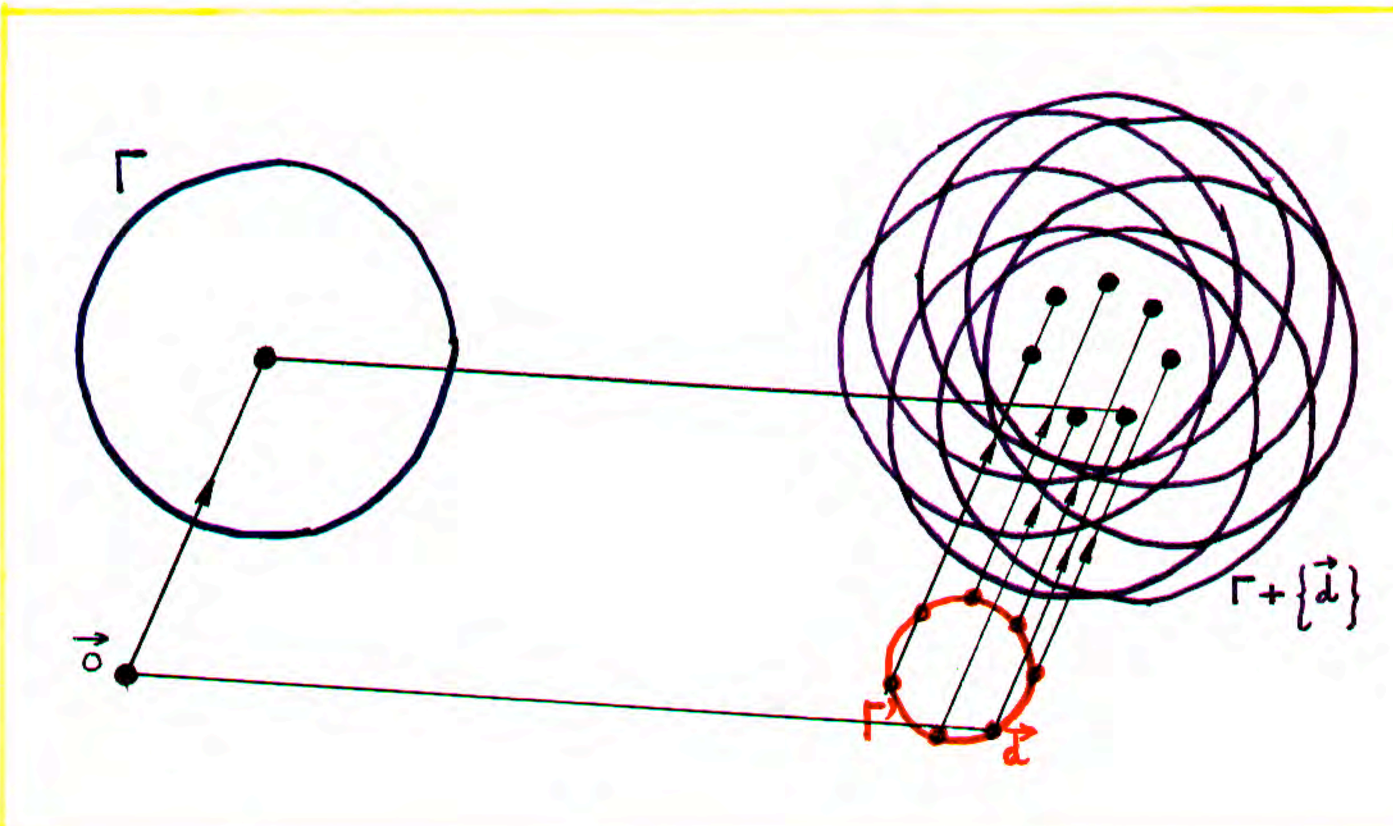
Γ
$\Gamma+\Gamma'$
$\vec{o}$
Γ'

EX La somme des cercles $\Gamma(\vec{a}, r)$ et $\Gamma'(\vec{b}, s)$
est la " couronne " de centre $\vec{a} + \vec{b}$,
de rayon intérieur égal à $|r - s|$ et
de rayon extérieur égal à $r + s$.

EX $\Gamma(\vec{a}, r) + \Gamma(\vec{b}, s) = \overline{\Delta}(\vec{a} + \vec{b}, r + s)$ $\underline{\underline{\text{ssi}}}$ $r = s$

EX La somme de deux cercles est un disque fermé
$\underline{\underline{\text{ssi}}}$
ils ont même rayon.

X EX Quelqu'un a entrepris de dessiner $\Gamma + \Gamma'$ (cf EX)
Voici son dessin inachevé ; échelle 5/4.



Qu'en penses-tu ?

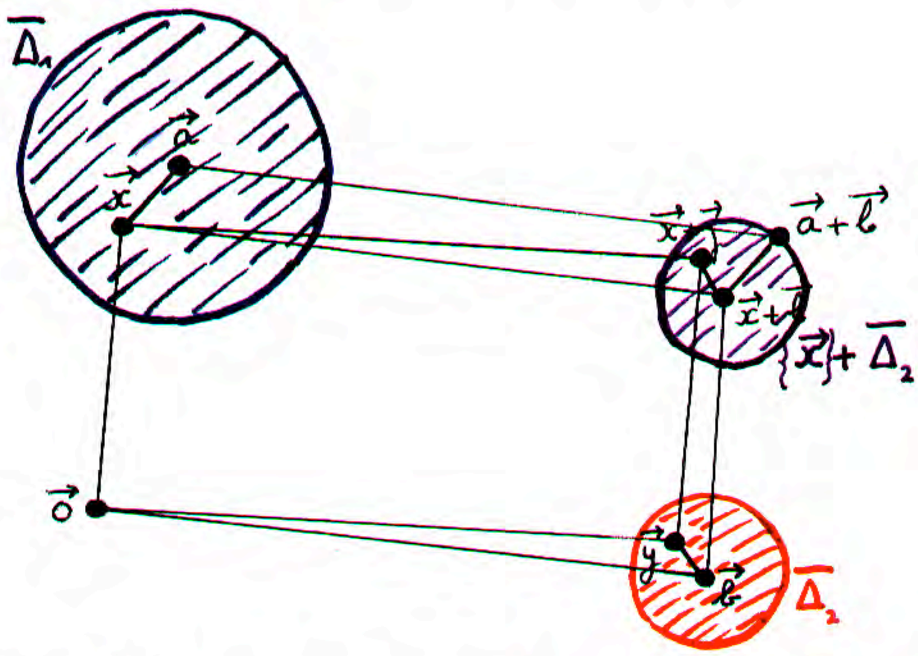
EX Dessine la somme de deux disques fermés.
Qu'en penses-tu ?

La somme de deux disques fermés (resp. ouverts) est un disque fermé (resp. ouvert) de centre égal à la somme des centres et de rayon égal à la somme des rayons.

1) □ $\overline{\Delta}_1(\vec{a}, r) + \overline{\Delta}_2(\vec{b}, s) \subset \overline{\Delta}_3(\vec{a}+\vec{b}, r+s)$

□ $\vec{x} \in \overline{\Delta}_1$ et $\vec{y} \in \overline{\Delta}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}+\vec{y} \in \overline{\Delta}_3$

*



$d(\vec{a}+\vec{b}, \vec{x}+\vec{y}) \leqslant d(\vec{a}+\vec{b}, \vec{x}+\vec{b}) + d(\vec{x}+\vec{b}, \vec{x}+\vec{y})$

$d(\vec{a}+\vec{b}, \vec{x}+\vec{y}) \leqslant \quad d(\vec{a}, \vec{x}) \quad + \quad d(\vec{b}, \vec{y})$

$d(\vec{a}+\vec{b}, \vec{x}+\vec{y}) \leqslant \quad r \quad + \quad s$ ■

Justifie !

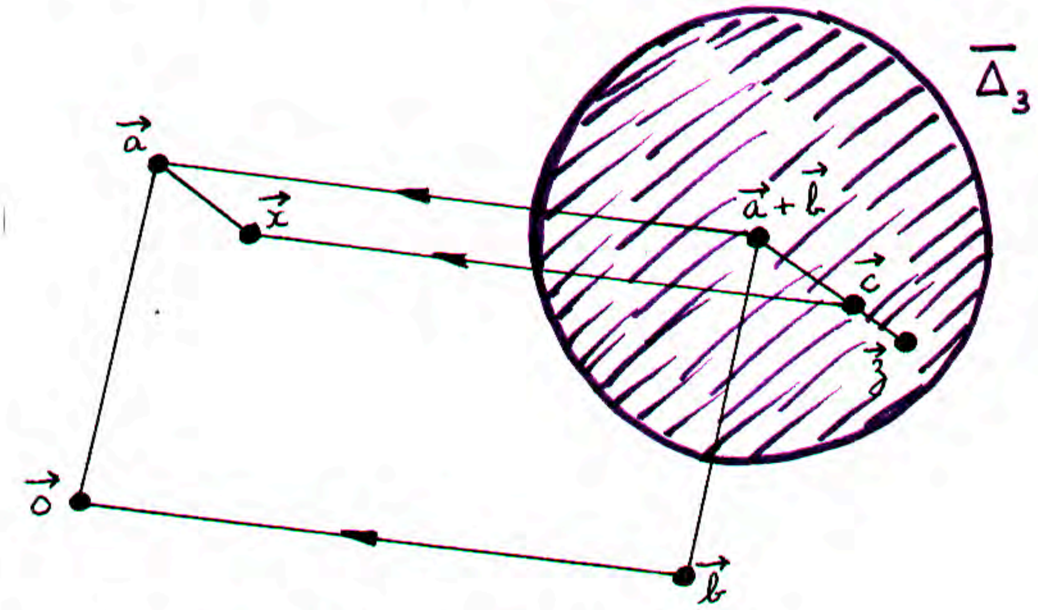
2) □ $\overline{\Delta}_3(\vec{a}+\vec{b}, r+s) \subset \overline{\Delta}_1(\vec{a}, r) + \overline{\Delta}_2(\vec{b}, s)$

□ $\vec{z} \in \overline{\Delta}_3 \quad \Rightarrow \quad \exists \vec{x} \in \overline{\Delta}_1, \exists \vec{y} \in \overline{\Delta}_2 : \quad \vec{z} = \vec{x}+\vec{y}$

* Voici $\vec{z} \in \overline{\Delta}_3$

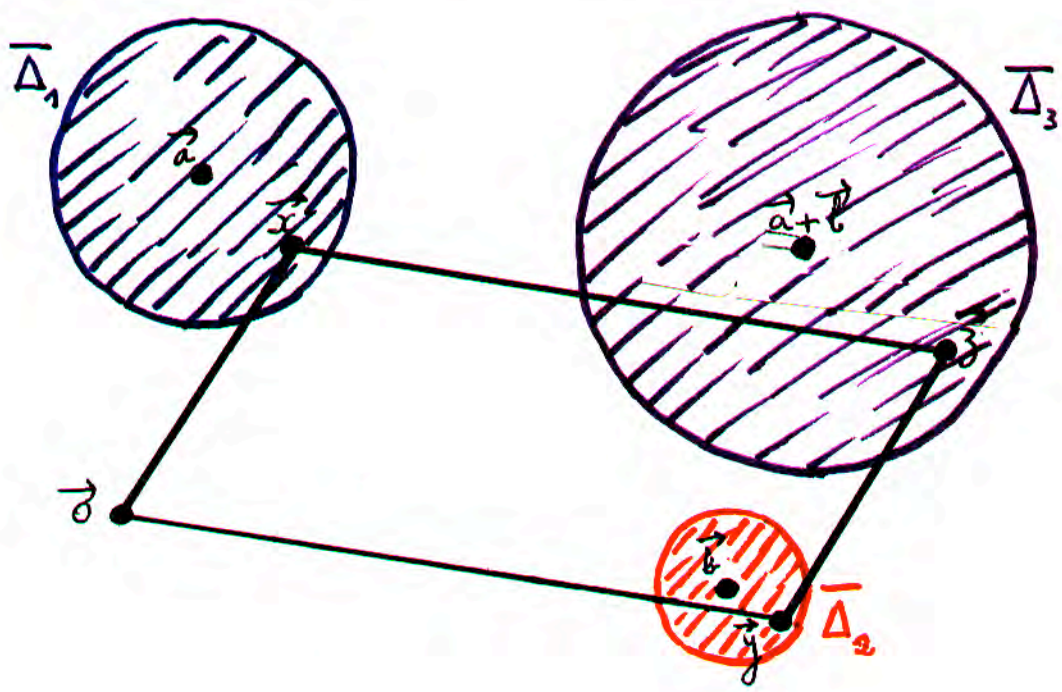
et $\quad \vec{c} \in [\vec{a}+\vec{b}, \vec{z}]$ tel que $d(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) \leqslant r$

Translatons $\vec{c}$ par le vecteur $-\vec{b}$ et posons $\vec{x} = \vec{c} - \vec{b}$



$$d(\vec{a}, \vec{x}) = d(\vec{a}, \vec{c} - \vec{b}) = d(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) \leqslant r$$
$$\vec{x} \in \overline{\Delta}(\vec{a}, r)$$

En posant $\vec{y} = \vec{z} - \vec{x}$, reste à examiner si
$$\vec{y} \in \overline{\Delta}(\vec{b}, s)$$
ce qui est effectivement vérifié puisque
$$d(\vec{b}, \vec{y}) = d(\vec{b}, \vec{z} - \vec{c} + \vec{b}) = d(\vec{c}, \vec{z}) \leqslant s$$



■

En apportant de minimes modifications à la démonstration précédente, tu démontreras aisément la propriété concernant la somme de deux disques ouverts.

EX Dessine un disque ouvert Δ de centre non ~~nul~~.
Dessine $-\Delta$. Dessine $\Delta - \Delta$.

EX $\forall A, B \in \mathcal{S}\Pi_0 \qquad A + B \in \mathcal{S}\Pi_0$

EX L'addition définie dans $\mathcal{S}\Pi_0, +$ est commutative et associative.

EX $\mathcal{S}\Pi_0, +$ n'est pas un groupe.

EX Dans Π_0 : dir A, $+$ est-il un groupe ?

EX Dans Π_0 : l'ensemble des disques ouverts, muni de l'addition, est-il un groupe ?

EX Pour tout groupe $G, *$
la loi $*$ permet de définir une loi – encore notée $*$ – dans $\mathcal{S}G$
$\forall A, B \in \mathcal{S}G \qquad A * B = \{ a * b \mid a \in A \text{ et } b \in B \}$

EX Dans $\mathbb{Z}, +$ calcule

$\{0, 1, 2\} + \{10, 20, 30\}$

$\{0, 1, 2\} + \{3, 4, 5\}$

$\{0, 1, 2\} + \{0, \bar{1}, \bar{2}\}$

$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \qquad 21\mathbb{Z} + 14\mathbb{Z}$

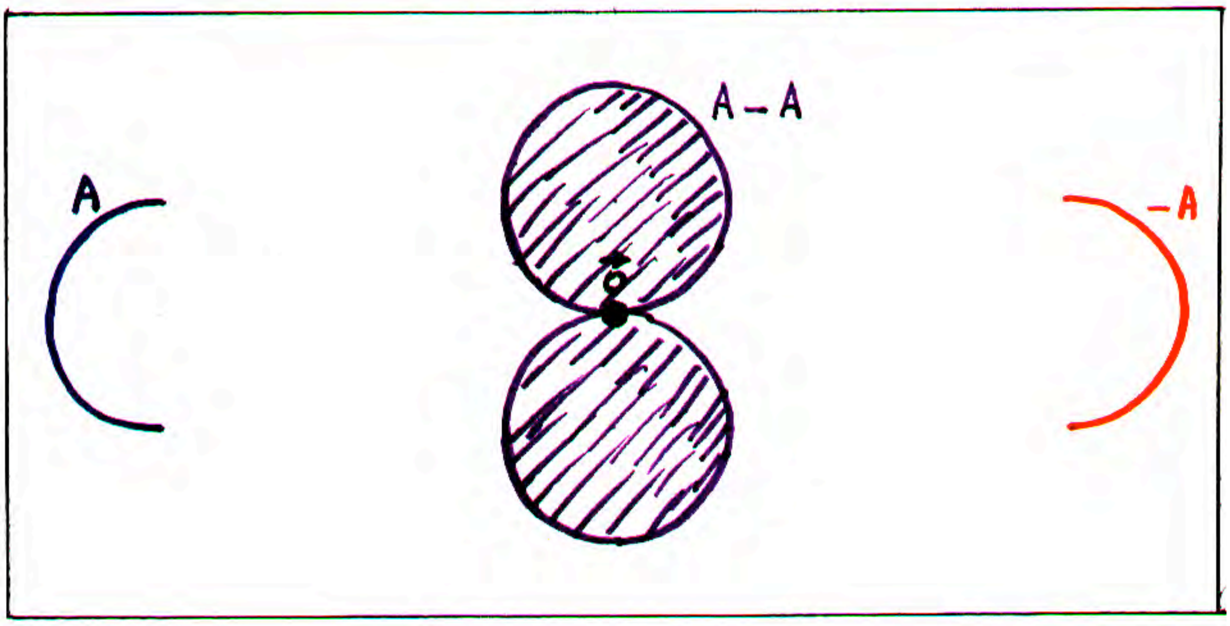
$2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} \qquad 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z} \qquad 25\mathbb{Z} + 65\mathbb{Z}$

EX <u>Si</u> S est une partie du groupe $G, *$
<u>Alors</u> S est un sous-groupe de $G, *$ <u>ssi</u> $S * S = S$

X

EX Réponse à l'EX

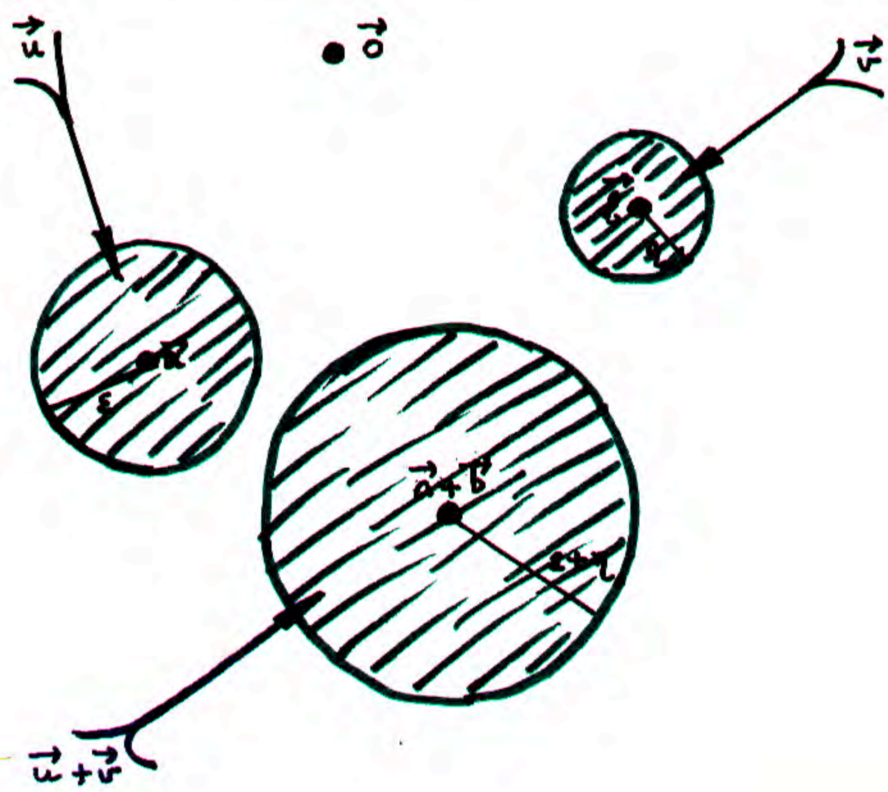


7 Calcul approché dans le vectoriel euclidien plan

Si $\vec{a}$ est valeur approchée de $\vec{u}$ à ε près
$\vec{b}$ est valeur approchée de $\vec{v}$ à η près
Alors $\vec{a}+\vec{b}$ est valeur approchée de $\vec{u}+\vec{v}$ à $\varepsilon+\eta$ près

ou encore

Si



Alors

* $\vec{a}$ est val. appr. de $\vec{u}$ à ε près et $\vec{b}$ est val. appr. de $\vec{v}$ à η près

$$\Updownarrow$$

$$d(\vec{a},\vec{u}) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad d(\vec{b},\vec{v}) \leqslant \eta$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{u} \in \Delta(\vec{a},\varepsilon) \quad \text{et} \quad \vec{v} \in \Delta(\vec{b},\eta)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{u}+\vec{v} \in \Delta(\vec{a},\varepsilon) + \Delta(\vec{b},\eta)$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{u}+\vec{v} \in \Delta(\vec{a}+\vec{b},\varepsilon+\eta)$$

$$\Updownarrow$$

$\vec{a}+\vec{b}$ est val. appr. de $\vec{u}+\vec{v}$ à $\varepsilon+\eta$ près ■

<u>Si</u> $\vec{a}$ est valeur approché de $\vec{u}$ à moins de ε près
$\vec{b}$ est valeur approché de $\vec{v}$ à moins de η près
<u>Alors</u> $\vec{a}+\vec{b}$ est valeur approché de $\vec{u}+\vec{v}$ à moins de $\varepsilon+\eta$ près.

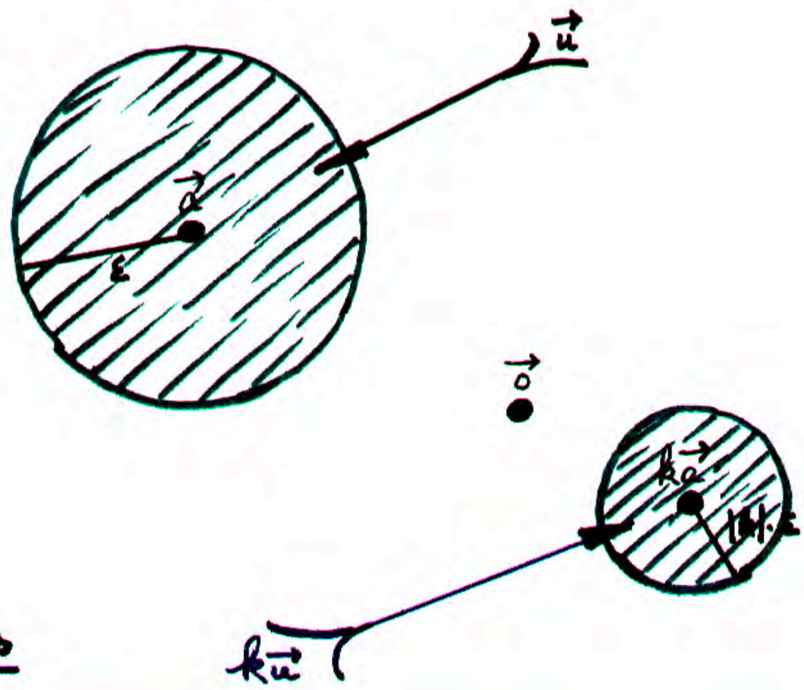
Tu démontreras sans peine :

Si $\vec{a}$ est valeur approché de $\vec{u}$ à (moins de) ε près
$k \in \mathbb{R}$

Alors $k\vec{a}$ est valeur approché de $k\vec{u}$ à (moins de) $|k|\varepsilon$ près.

ou encore

Si

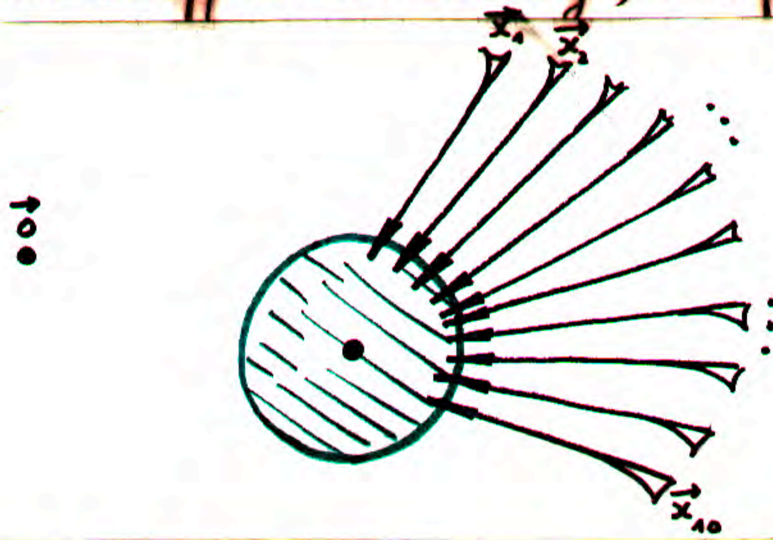


Alors

EX Evalue la valeur de k sur le dessin ci-dessus.

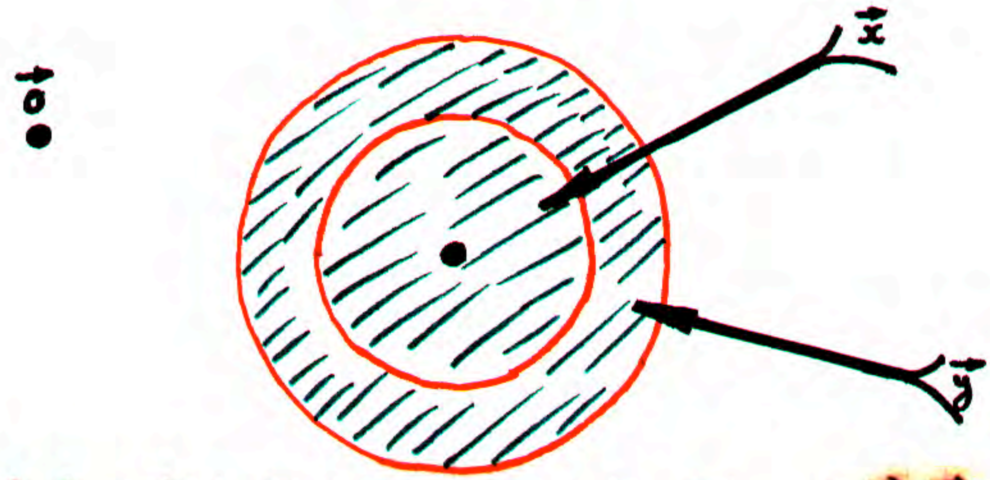
EX Calcule une valeur approché de $\vec{x}+\vec{y}$, sachant que $\vec{a}$ est une valeur approché de $\vec{x}$ et de $\vec{y}$, à ε près.

EX



Dessine la plus petite partie de Π_0 à laquelle $\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{10}$ appartient certainement.

EX



Dessine la plus petite partie de $\mathcal{T}_0$ comprenant certainement $\vec{x}+\vec{y}$

EX Calcule une valeur approchée de

$-\vec{u} \qquad -2\vec{u} \qquad 5(\vec{u}+\vec{v}) \qquad 3(\vec{u}-\vec{v})$

et précise chaque fois l'approximation, sachant que

$\vec{a}$ est valeur approchée de $\vec{u}$ à 5 cm près

$\vec{b}$ est valeur approchée de $\vec{v}$ à 3,5 cm près.

EX Voici $\vec{a}$, valeur approchée de $\vec{x}$ à 3 cm près

et $\vec{b}$, valeur approchée de $\vec{y}$ à 4 cm près

Dessine le plus petit disque fermé qui comprend certainement $0{,}5\vec{x} - 2\vec{y}$.

EX Voici le plus petit disque ouvert qui comprend certainement $-3\vec{x}$

Dessine le plus petit disque ouvert qui comprend certainement $\vec{x}$.